PR-5.01. *En los tiempos de Newton no se podía detectar la cuantización de la energía*

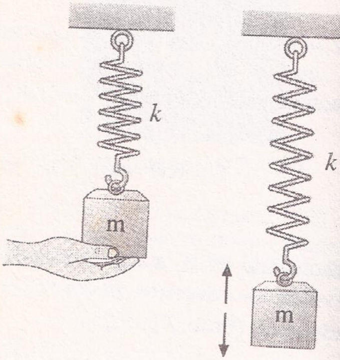
Sea un sistema clásico constituido por una masa $m = 0{,}5$ kg suspendida de un resorte de constante elástica $k = 20$ N/m que se hace oscilar con una amplitud $A = 0{,}1$ m. Suponga que, por efectos de rozamiento, su energía va disminuyendo en paquetes de tamaño, $\Delta E = hf$. Halle:

a) La frecuencia f de las oscilaciones.

b) La energía de cada paquete y la energía total E_n.

c) La disminución relativa de energía en un salto, $\Delta E / E$.

d) El número cuántico correspondiente al estado inicial.



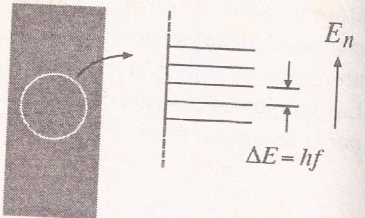
Solución: a) La frecuencia del sistema masa-resorte es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20\text{N/m}}{0{,}50\text{kg}}} = 1{,}0\text{Hz}$$

b) Un quantum de energía a esta frecuencia vale:

$$\Delta E = hf = (6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(1{,}0\text{s}^{-1}) = 6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J}$$

Estos saltos son tan pequeños que si quisiéramos graficar los niveles de energía, estos formarían un continuo. La energía total del oscilador es:



Los niveles de energía del oscilador clásico forman un continuo

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(20\text{N/m})(0{,}10\text{m})^2 = 0{,}1\text{J}$$

c) La disminución relativa de energía en cada salto es:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{6{,}6\text{x}10^{-34}\,\text{J}}{0{,}1\text{J}} = 6{,}6\text{x}10^{-33}$$

Para detectar la naturaleza cuantizada de la energía se necesitarían instrumentos con sensitividad mejor que 7 partes en 10^{33}, lo cual está muy lejos de la capacidad actual de cualquier técnica experimental.

d) Aplicando la relación: $E_n = n\Delta E$, encontramos el numero cuántico:

$$n = \frac{E_n}{\Delta E} = \frac{0,1\text{J}}{6,6\text{x}10^{-34}\text{J}} \approx 15\text{x}10^{31}$$

La detección de la cuantización resulta imposible en los sistemas clásicos, esta es importante y medible sólo a nivel atómico y molecular.

Respuesta:

a) $f = 1,0\text{Hz}$
b) $\Delta E = 6,6\text{x}10^{-34}\text{J}$
c) $\Delta E / E = 6,6\text{x}10^{-33}$
d) $n \approx 15\text{x}10^{31}$

PR-5.02. *Fórmula de Planck en el límite $\lambda \to \infty$*

Demuestre que la expresión para la intensidad de la radiación de cuerpo negro de Planck, $I(\lambda,T)$, se reduce a la ley clásica de Rayleigh-Jeans cuando $\lambda \to \infty$.

Solución: La ley de radiación de Planck para la potencia por unidad de área por unidad de intervalo de longitud de onda es:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} \qquad \text{W/m}^3$$

Si llamamos $x = hc/\lambda kT$, podemos escribir:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^x - 1)}$$

Cuando $\lambda = hc/kTx \to \infty$ se tiene $x \to 0$. Si recordamos que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

podemos aproximar: $e^x - 1 \approx x$. Por lo tanto:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^x - 1)} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{x} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{hc/\lambda kT} = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$

Que es la fórmula clásica de Rayleigh-Jeans.

Respuesta:

Planck → Rayleigh-Jeans

$$\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} \to \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$

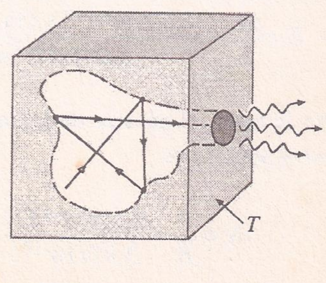
cuando: $\lambda \to \infty$

PR-5.03. *¿Cuántos fotones salen por ese agujero?*

Una cavidad que tiene un pequeño agujero de diámetro d = 0,05 mm, se mantiene a una temperatura T = 7500 K. Considerando que es un cuerpo negro, determine:

a) La intensidad de la luz emitida en un intervalo de longitudes de onda entre λ_1 = 500 nm y λ_2 = 501 nm

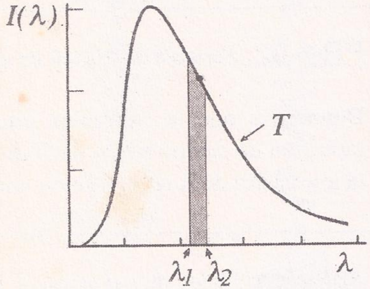
b) El número de fotones por segundo que salen por el agujero en ese intervalo de longitudes de onda.



Solución: La fórmula de Planck para la intensidad por unidad de intervalo de longitud de onda es:

$$I(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT}-1)} \quad \text{W/m}^3$$

Para un pequeño intervalo de longitudes de onda entre λ_1 y λ_2, la intensidad o potencia por unidad de área está representada por el área bajo la curva entre esos limites y la podemos aproximar multiplicando la altura de la curva, $I(\lambda)$ y por el intervalo $\Delta\lambda$:



$$I=\frac{P}{A}=\frac{2\pi hc^2\Delta\lambda}{\overline{\lambda}^5(e^{hc/\overline{\lambda}kT}-1)} \quad \text{W/m}^2$$

Siendo $\overline{\lambda}=(\lambda_1+\lambda_2)/2$ = 500,5 nm, el valor promedio de las dos longitudes de onda y el intervalo $\Delta\lambda$ = 1,0 nm. El valor numérico del factor $x=hc/\overline{\lambda}kT$ es:

$$x=\frac{hc}{\overline{\lambda}kT}=\frac{(6{,}62\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^8\,\text{m/s})}{(5{,}05\text{x}10^{-7}\,\text{m})(1{,}38\text{x}10^{-23}\,\text{J/K})(7500\text{K})}=3{,}83$$

Obtenemos así la intensidad que sale por el agujero:

$$I=\frac{2\pi(6{,}62\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^8\,\text{m/s})^2(1{,}00\text{x}10^{-9}\,\text{m})}{(5{,}005\text{x}10^{-7}\,\text{m})^5(e^{3{,}83}-1)}$$

$$I=2{,}65\text{x}10^5\,\text{W/m}^2$$

b) La potencia irradiada desde el agujero es $P=IA$:

$$P=I\frac{\pi d^2}{4}=\frac{(2{,}65\text{x}10^5\,\text{W/m}^2)\pi(5\text{x}10^{-5}\,\text{m})^2}{4}=5{,}20\text{x}10^{-4}\,\text{W}$$

El valor promedio de la energía de un fotón es:

$$\overline{E}=\frac{hc}{\overline{\lambda}}=\frac{(6{,}62\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^8\,\text{m/s})}{5{,}005\text{x}10^{-7}\,\text{m}}=3{,}97\text{x}10^{-19}\,\text{J}$$

Por lo tanto, el número de fotones por segundo que salen por el agujero es:

$$N=\frac{P}{\overline{E}}=\frac{5{,}20\text{x}10^{-4}\,\text{J}/s}{3{,}97\text{x}10^{-19}\,\text{J}}=1{,}31\text{x}10^{15}\ /\text{seg}$$

Respuesta:

a) $I=2{,}65\text{x}10^5\,\text{W/m}^2$
b) $N=1{,}31\text{x}10^{15}$ Fotones/seg

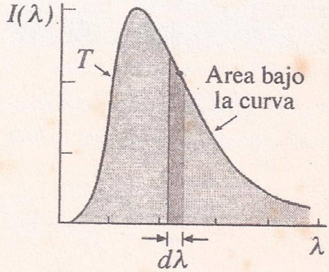
PR-5.04. *La ley de Stephan-Boltzmann*

Demuestre que la potencia total por unidad de área radiada por un cuerpo negro ideal a una temperatura T es igual a σT^4, siendo σ una constante independiente de T.

$$P = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5{,}67\text{x}10^{-8}\,\text{W/m}^2\text{K}^4$$

Solución: La fórmula de radiación de Planck da la potencia por unidad de área por intervalo de longitud de onda radiada por un cuerpo negro a una temperatura T, por lo tanto, la potencia total por unidad de área es el área bajo la curva de $I(\lambda)$ vs λ:



$$P = \int_0^\infty I(\lambda, T)\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}\,d\lambda$$

Si llamamos $x = hc/\lambda kT$, entonces:

$$\lambda = hc/kTx \qquad\qquad d\lambda = -(hc/kTx^2)\,dx$$

Tomando en cuenta los límites: cuando λ varía de $0 \to \infty$ entonces x varía de $\infty \to 0$, podemos escribir:

$$P = 2\pi hc^2 \left(\frac{kT}{hc}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{(e^x - 1)} = 2\pi hc^2 \left(\frac{k}{hc}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} T^4$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{(e^x - 1)} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$P = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}\right) T^4 = \sigma T^4$$

Esta es la ley de Stephan-Boltzmann y expresa que la potencia total irradiada por unidad de área de abertura de la cavidad es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura. La constante de proporcionalidad es:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 (1{,}38\text{x}10^{-23}\,\text{J/K})^4}{15(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})^3 (3\text{x}10^8\,\text{m/s})^2} = 5{,}67\text{x}10^{-8}\,\text{W/m}^2\text{K}^4$$

Respuesta:

$$\boxed{\begin{array}{c} P = \left(\dfrac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}\right) T^4 = \sigma T^4 \\ \sigma = 5{,}67\text{x}10^{-8}\,\text{W/m}^2\text{K}^4 \end{array}}$$

PR-5.05. *La ley de desplazamiento de Wien*

Demuestre la ley de desplazamiento de Wien: La longitud de onda λ_{max} a la cual ocurre el pico de cada curva de distribución espectral varia en proporción inversa a la temperatura T, según la relación:

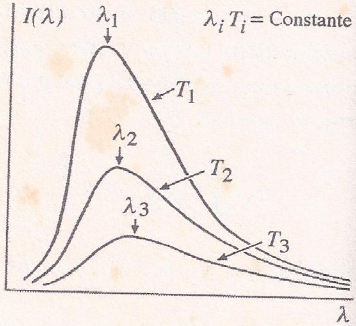
$$\lambda_{max} T = 2{,}898\text{x}10^{-3}\,\text{m.K}$$

Solución: La fórmula de radiación de Planck expresa cómo varía la intensidad de la radiación con la longitud de onda, para una dada temperatura T:

$$I(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT}-1)}$$

Derivando esta expresión con respecto a la longitud de onda:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda}=2\pi hc^2\left[-\frac{5}{\lambda^6(e^{hc/\lambda kT}-1)}+\frac{-e^{hc/\lambda kT}(-hc/\lambda^2 kT)}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT}-1)^2}\right]$$



En la posición del máximo se debe cumplir la condición: $\partial I/\partial\lambda = 0$, por lo tanto:

$$-\frac{5}{\lambda}+\frac{e^{hc/\lambda kT}(hc/\lambda^2 kT)}{(e^{hc/\lambda kT}-1)}=0$$

Escogiendo una nueva variable: $x = hc/\lambda kT$, podemos escribir:

$$-5+\frac{xe^x}{(e^x-1)}=0 \qquad \Rightarrow \qquad (x-5)e^x+5=0$$

La solución de esta ecuación trascendente la podemos obtener aproximadamente en forma gráfica o mediante cálculo numérico. Una solución trivial es $x = 0$, la otra es el valor de x buscado:

$$x=4{,}9651=hc/\lambda kT \qquad \Rightarrow \qquad \lambda T=\frac{hc}{4{,}9651k}$$

$$\lambda T=\frac{(6{,}62\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^{8}\,\text{m/s})}{4{,}9651(1{,}38\text{x}10^{-23}\,\text{J/K})}=2{,}898\text{x}10^{-3}\text{m.K}$$

Respuesta:

Ley de Wien:
$\lambda_{max}T = 2{,}898\text{x}10^{-3}\text{m.K}$

PR-5.06. *La radiación térmica que emana de tu cuerpo*

Supongamos que tu piel desnuda tiene un área total de 1,45 m^2, que tu temperatura promedio es cerca de 37 °C, y que, independientemente de que seas catire o moreno, tu irradias como un cuerpo negro. Si estás en una habitación a una temperatura ambiente de 20 °C, determine:

a) Longitud de onda a la que emites la mayor energía. ¿En que parte del espectro electromagnético se encuentra?

b) La potencia neta irradiada si tu emisividad es $\varepsilon = 0{,}65$.

Solución: La temperatura absoluta del cuerpo es $T = 37 + 273 = 310$ K y aplicando la ley de desplazamiento de Wien, se obtiene la longitud de onda de los fotones de mayor energía:

$$\lambda_{max} T = 2{,}898\text{x}10^{-3}\text{m.K}$$

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}898\text{x}10^{-3}\text{m.K}}{310\text{K}} = 9{,}35\text{x}10^{-5}\text{m} = 9{,}35\text{x}10^{3}\text{nm}$$

Esta longitud de onda queda fuera del espectro visible y corresponde a la región *infrarroja*. No importa si eres blanco o trigueño.

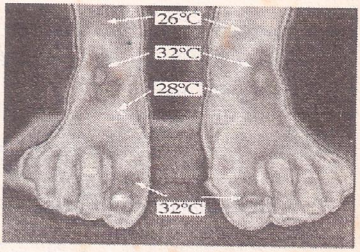


Imagen térmica de infrarrojo de los pies de una persona

b) De acuerdo a la ley de Stephan-Boltzmann, para un cuerpo de área A y temperatura T la potencia irradiada es $\varepsilon A\sigma T^4$, siendo ε la emisividad. Al mismo tiempo la potencia absorbida del ambiente a temperatura T_a es $\varepsilon A\sigma T_a^4$. La potencia neta irradiada es:

$$P = \varepsilon A\sigma(T^4 - T_a^4)$$

$$P = 0{,}65(1{,}45\text{m}^2)(5{,}67\text{x}10^{-8}\text{W/m}^2\text{K}^4)(310\text{K}^4 - 293\text{K}^4)$$

$$P = 99{,}7\text{W}$$

Es decir, tu comportamiento energético sería parecido al de un bombillo de 100 vatios.

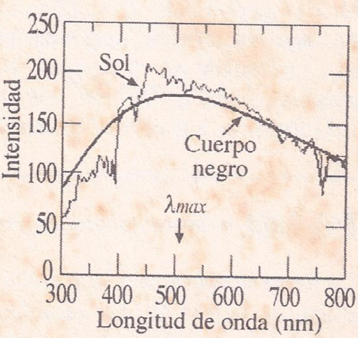
Respuesta:

a) $\lambda_{max} = 9{,}35\text{x}10^{3}\text{nm}$
b) $P = 99{,}7\text{W}$

PR-5.07. ***¿Cuál es la temperatura del Sol y de la Tierra?***

En la figura se muestra una gráfica de la intensidad relativa de la radiación emitida por el Sol a diferentes longitudes de onda en la región alrededor del máximo, reportada por R. L. Kurucz en 1984.

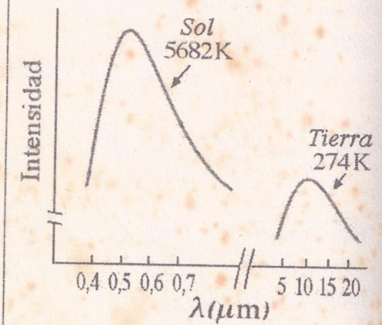
a) Determine la temperatura media de la superficie solar suponiendo que emite como un cuerpo negro ideal.
b) Calcule la potencia total que irradia el Sol.
c) Estime la temperatura media de la Tierra suponiendo que se encuentra en equilibrio térmico.



Solución: a) La longitud de onda correspondiente a la posición del máximo del espectro solar es cerca de 510nm. Para hallar la temperatura del Sol, aplicamos la ley del corrimiento de Wien:

$$\lambda_{max}T_s = 2{,}898\text{x}10^{-3}\text{m.K}$$

$$T_s = \frac{2{,}898\text{x}10^{-3}\text{m.K}}{\lambda_{max}} = \frac{2{,}898\text{x}10^{-3}\text{m.K}}{510\text{x}10^{-9}\text{m}} = 5682\text{K}$$



b) Aplicando la ley de Stephan-Boltzmann, si T_s es la temperatura del Sol y R_s es el radio, la salida de potencia irradiada el Sol es:

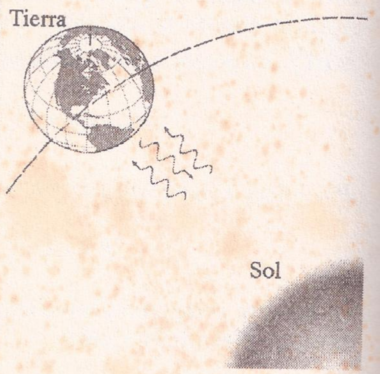
$$P_s = A\sigma T_s^4 = 4\pi R_s^2\sigma T_s^4$$

$$P_s = 4\pi(6{,}96\text{x}10^8\text{m})^2(5{,}67\text{x}10^{-8}\text{W/m}^2\text{K}^4)(5682\text{K})^4$$

$$P_s = 3{,}60\text{x}10^{26}\text{W}$$

c) Si d_{ts} es la distancia Tierra-Sol y R_T el radio de la Tierra, la potencia de la luz solar interceptada por la Tierra es:

$$P_t = \frac{\pi R_t^2}{4\pi d_{ts}^2}P_s = \frac{R_t^2}{4d_{ts}^2}P_s$$



En el equilibrio térmico la potencia que absorbe la Tierra debe ser igual a la potencia que emite a causa de su temperatura: $P_t' = (4\pi R_t^2)\sigma T_t^4$. Por lo tanto:

$$(4\pi R_t^2)\sigma T_t^4 = \frac{R_t^2}{4d_{ts}^2}P_s = \frac{R_t^2}{4d_{ts}^2}4\pi R_s^2\sigma T_s^4$$

$$T_t = \sqrt{\frac{R_s}{2d_{ts}}}T_s = \sqrt{\frac{6{,}96\text{x}10^8\text{m}}{2(1{,}50\text{x}10^{11}\text{m})}}5682\text{K} = 274\text{K} \approx 1°\text{C}$$

Hemos encontrado que, mientras el espectro del Sol presenta un máximo para una longitud de onda de 510 nm, que queda en el espectro visible, para la Tierra el máximo ocurre a 1058 nm, que se encuentra en la región del infrarrojo, a la cual no es sensible el ojo humano.

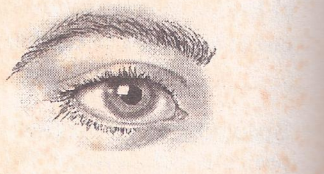
Respuesta:

a) $T_s = 5682\text{K}$
b) $P_s = 3{,}60\text{x}10^{26}\text{W}$
c) $T_t = 274\text{K}$

PR-5.08. *Número de fotones que sensibilizan el ojo*

La llama típica de una vela emite energía de luz visible a razón de $1\text{x}10^{-4}$ W. Un estudiante asegura que, en una noche sin Luna, él puede detectar esta vela en una región oscura hasta una distancia de 6 km. Suponga que su pupila tiene un diámetro de 7 mm cuando se adapta a la oscuridad en ese límite de visibilidad.

a) ¿Cuántos fotones por segundo emite la llama de la vela, suponiendo una longitud de onda media $\lambda = 600\text{nm}$?
b) ¿Cuántos fotones por segundo penetran en cada ojo?



Solución: Suponiendo que la longitud de onda media de la luz es $\lambda = 600\text{nm}$, la energía de un fotón es:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63\text{x}10^{-34}\,\text{J.s})(3\text{x}10^{8}\,\text{m/s})}{(600\text{x}10^{-9}\,\text{m})} = 3{,}32\text{x}10^{-19}\,\text{J}$$

El número total de fotones por segundo que salen de la vela en todas direcciones es:

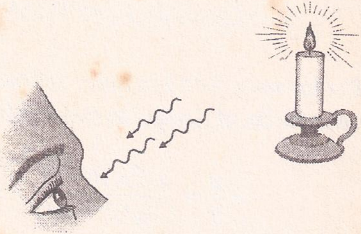
$$N = \frac{P}{E} = \frac{1\text{x}10^{-4}\,\text{J/s}}{3{,}32\text{x}10^{-19}\,\text{J/fotón}} = 3{,}01\text{x}10^{14}\ \text{fotones/seg}$$

Estos fotones estarán distribuidos sobre una esfera de radio R, de modo que el número n de fotones por segundo que alcanzan la pupila del ojo, de área $A = \pi d^2/4$ es:

$$n = N\frac{A}{4\pi R^2} = N\frac{\pi d^2/4}{4\pi R^2} = N\frac{d^2}{16R^2}$$

Si la vela se encuentra a una distancia $R = 6$ km, el número de fotones por segundo que penetran cada ojo será:

$$n = 3{,}01\text{x}10^{14}\,\frac{(7\text{x}10^{-3}\text{m})^2}{16(6\text{x}10^{3}\text{m})^2} \approx 26\ \text{Fotones/segundo}$$



Respuesta:

$\boxed{\text{26 Fotones/segundo}}$